２０２４年度　明海大学歯学部　総合型選抜（自己推薦型）Ｉ期入学試験

数学的思考力テスト解答用紙

※ 解答欄には答えだけではなく，その答えを導く過程も記入しなさい。
※ 解答欄に解答が収まらない場合は裏面を使用してもよい。その場合は，どの問題に対する解答であるかを明記すること。

I.

(1) $13 \overset{\text{(i)}}{\to} 7 \overset{\text{(i)}}{\to} 4 \overset{\text{(ii)}}{\to} 2 \overset{\text{(ii)}}{\to} 1$となるので，$m=2,\ n=2$である。

(2) $227 \overset{\text{(i)}}{\to} 114 \overset{\text{(ii)}}{\to} 57 \overset{\text{(i)}}{\to} 29 \overset{\text{(i)}}{\to} 15 \overset{\text{(i)}}{\to} 8 \overset{\text{(ii)}}{\to} 4 \overset{\text{(ii)}}{\to} 2 \overset{\text{(ii)}}{\to} 1$となるので，$m=4,\ n=4$である。

(3) (i)または(ii)の操作によって1となる自然数は2のみであることは容易に確かめられる。さらに，2以上の自然数aについて，(i)または(ii)の操作によってaとなる自然数は全部で$2a-1$と$2a$の2個であることも容易に確かめられる。これを用いると，次のことがわかる。

・(i)または(ii)の操作によって2となる自然数は全部で$3, 4$の2個である。

・(i)または(ii)の操作によって$3, 4$のいずれかとなる自然数は全部で$5, 6, 7, 8$ の4個である。

・(i)または(ii)の操作によって$5, 6, 7, 8$ のいずれかとなる自然数は全部で$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$の$8$個である。

したがって，4回の操作で1となる自然数は$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$である。

(4) 数学的帰納法により，すべての自然数kについて次の命題(A)が成り立つことを示す：

(A)「k回の操作によって1となる自然数は$2^{k-1}+1,\ 2^{k-1}+2, \ldots, 2^k$の$2^{k-1}$個である。」

まず，(i)または(ii)の操作によって1となる自然数は2のみであることは容易に分かる。これは$k=1$のとき(A)が成り立つことを示している。次に，ある自然数lに対して$k=l$のとき(A)が成り立つと仮定する。各自然数$i=1, 2, \ldots, 2^{l-1}$に対して(i)または(ii)の操作によって$2^{l-1}+i$となる自然数は2^l+2i-1と2^l+2iである。ゆえに，(i)または(ii)の操作によって$2^{l-1}+1,\ 2^{l-1}+2, \ldots, 2^l$のいずれかとなる自然数は$2^l+1,\ 2^l+2, \ldots, 2^{l+1}$の$2^l$個である。これらのことから，$l+1$回の操作によって$1$となる自然数は$2^l+1,\ 2^l+2, \ldots, 2^{l+1}$の$2^l$個であることが分かる。ゆえに，$k=l+1$のとき(A)が成り立つ。以上より，すべての自然数$k$について(A)が成り立つことが示された。

このとき，2^{k-1}個の自然数$2^{k-1}+1,\ 2^{k-1}+2, \ldots, 2^k$のうち最小のものは$2^{k-1}+1$である。

（次のページへ続く）

II.

(1) $[\![33]\!]$は100を33で割った商であるから，$100 = 3 \times 33 + 1$より，$[\![33]\!] = 3$である。

(2) $[\![13]\!]$は100を13で割った商であるから， $100 = 7 \times 13 + 9$より，$[\![13]\!] = 7$である。

(3) $[\![x]\!] = 2$とする。このとき，100をxで割ったときの商は2であるから，余りを$r(0 \leqq r < x)$とすると，$100 = 2x + r$と書ける。ゆえに，$r = 100 - 2x$である。したがって，$0 \leqq 100 - 2x < x$となる。ゆえに，$\frac{100}{3} < x \leqq 50$である。これを満たす$x$は，$x = 34, 35, \dots, 50$である。逆に$x = 34, 35, \dots, 50$が$[\![x]\!] = 2$を満たすことは容易に確かめることができる。

以上より，$[\![x]\!] = 2$となるxは$x = 34, 35, \dots, 50$の17個である。

(4) $[\![y]\!] = 4$とする。このとき，100をyで割ったときの商は4であるから，余りを$r(0 \leqq r < y)$とすると，$100 = 4y + r$と書ける。ゆえに，$r = 100 - 4y$である。したがって，$0 \leqq 100 - 4y < y$となる。ゆえに，$20 < y \leqq 25$である。これを満たすyは，$y = 21, 22, 23, 24, 25$である。逆に$y = 21, 22, 23, 24, 25$が$[\![y]\!] = 4$を満たすことは容易に確かめることができる。

以上より，$[\![y]\!] = 4$となるyは$y = 21, 22, 23, 24, 25$の5個である。

(5) ・$[\![51]\!] = [\![52]\!] = \cdots = [\![100]\!] = 1$,

・$[\![34]\!] = [\![35]\!] = \cdots = [\![50]\!] = 2$,

・$[\![26]\!] = [\![27]\!] = \cdots = [\![33]\!] = 3$,

・$[\![21]\!] = [\![22]\!] = \cdots = [\![25]\!] = 4$

である。また，$[\![17]\!] = [\![18]\!] = [\![19]\!] = [\![20]\!] = 5$，$[\![15]\!] = [\![16]\!] = 6$，$[\![13]\!] = [\![14]\!] = 7$，$[\![12]\!] = 8$，$[\![11]\!] = 9$，$[\![10]\!] = 10$である。

以上より，$[\![10]\!] + [\![11]\!] + [\![12]\!] + \cdots + [\![99]\!] + [\![100]\!] = 10 + 9 + 8 + 7 \times 2 + 6 \times 2 + 5 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 8 + 2 \times 17 + 1 \times 50 = 201$である。